

# Álgebra Lineal

Cuadernos de cátedra

Departamento de Ciencias Básicas  
Universidad Don Bosco

Luis Alonso Arenívar

Números Complejos  
Matrices  
Geometría Analítica  
Vectores en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$   
Estructuras Algebraicas  
Espacios Vectoriales



# Algebra Lineal

Departamento de Ciencias Básica • Universidad Don Bosco



© Editorial Universidad Don Bosco, 2012

© Arenívar, Luis Alonso, tercera edición 2012

Cuadernos de cátedra

Apartado Postal 1874, San Salvador, El Salvador

Diseño: Melissa Beatriz Méndez Moreno

Hecho el depósito que marca la ley

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, electrónico o mecánico sin la autorización de la Editorial



## UNIDAD 1

### NÚMEROS COMPLEJOS

1.1	Introducción a la unidad imaginaria	5
1.2	Definición de números complejos	5
1.3	Igualdad de números complejos	6
1.4	Suma, resta y producto de números complejos	7
1.5	Definición de conjugado de un número complejo	10
1.6	Cociente de números complejos	11
1.7	Ejercicios	11
1.8	Raíces cuadradas de números complejos	13
1.9	Plano complejo	14
1.10	Valor absoluto de un número complejo	15
1.11	Soluciones complejas	16
1.12	Ejercicios	20

## UNIDAD 2

### MATRICES

2.1	Definición de matriz	25
2.2	Tipos de matrices	25
2.3	Igualdad de matrices	29
2.4	Operaciones con matrices	30
2.5	Ejercicios	38
2.6	Determinantes	46
2.7	Matriz inversa	59
2.8	Ejercicios	71
2.9	Sistemas de ecuaciones	77
2.10	Problemas de aplicación	97
2.11	Ejercicios	99

## UNIDAD 3

### GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1	Sistema coordenado bidimensional	105
3.2	Distancia entre dos puntos	106
3.3	División de un segmento en una razón dada	107
3.4	Pendiente de una recta	108
3.5	Rectas paralelas y perpendiculares	110
3.6	Ángulo entre dos rectas	112
3.7	La línea recta	114
3.8	Ejercicios	122
3.9	Las cónicas como lugar geométrico	128
3.10	La circunferencia	129
3.11	La parábola	133
3.12	La elipse	139
3.13	La hipérbola	146
3.14	Traslación de ejes coordenados	157
3.15	Ejercicios	159

## UNIDAD 4

### VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

4.1	Vectores en el plano y en el espacio	169
4.2	Vectores	177
4.3	Álgebra vectorial	179
4.4	Producto punto	182
4.5	Ángulo entre vectores	183
4.6	Vectores paralelos y ortogonales	185
4.7	Proyecciones	187
4.8	Ángulos de dirección y cosenos de dirección	191
4.9	Producto vectorial	193
4.10	Triple producto escalar	200
4.11	Ejercicios	202

## UNIDAD 5

### ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

5.1	Operación binaria	211
5.2	Ejercicios	225
5.3	Estructuras algebraicas	228
5.4	Semigrupo	228
5.5	Monoide	228
5.6	Grupo	229
5.7	Ejercicios	240
5.8	Anillo	244
5.9	Cuerpo o campo	247
5.10	Campos de Galois	250
5.11	Ejercicios	252

## UNIDAD 6

### ESPACIOS VECTORIALES

6.1	Espacio euclídeo de n dimensiones	259
6.2	Espacios vectoriales	260
6.3	Subespacios	266
6.4	Ejercicios	269
6.5	Dependencia e independencia lineal	272
6.6	Base y dimensión de un espacio vectorial	282
6.7	Ejercicios	286
6.8	Espacio de las filas de una matriz	290
6.9	Espacio con producto interno	292
6.10	Longitud y ángulo en espacios con producto interno	294
6.11	Bases ortonormales	295
6.12	Proceso de Gram- Schmidt	297
6.13	Ejercicios	300



Estos apuntes han sido diseñados para un curso de introducción de Álgebra Lineal. Se ha procurado que el texto sea lo más autosuficiente posible, en el sentido de que pueda leerse sin más conocimientos previos de matemática que los muy elementales. No se requiere Cálculo.

De acuerdo a la temática que se me sugirió, el programa de esta asignatura ha sido distribuido en seis unidades.

*Unidad 1. Números complejos.* Comprende una introducción a los números complejos, y sus propiedades; necesaria para resolver algunas ecuaciones con soluciones complejas y también como un anticipo teórico al estudio de las estructuras algebraicas.

*Unidad 2. Matrices y determinantes.* Se desarrollan plenamente las matrices con sus operaciones y propiedades, se dedica atención especial a las matrices cuadradas y a sus inversas. Los determinantes se desarrollan en forma sistemática. Esta unidad termina con el estudio de ecuaciones lineales simultáneas y sus aplicaciones.

*Unidad 3. Geometría Analítica.* Estudia las gráficas y las ecuaciones de rectas y cónicas. El desarrollo de los métodos de la Geometría Analítica, en gran medida, descansa en procesos algebraicos. Es normal que en esta unidad pueda encontrar dificultades, no con los nuevos conceptos y procedimientos que se presentan, sino con el manejo de técnicas algebraicas, escasa o deficientemente aprendidas, o simplemente olvidadas. Razón por la que se pide reforzar el manipuleo algebraico estudiado en tercer ciclo y bachillerato.

*Unidad 4. Vectores en el plano y en el espacio.* Trata del estudio de los vectores del plano y del espacio, y se hace énfasis en el espacio tridimensional, pero, en algunos casos se expone brevemente la generalización a  $n$  dimensiones. Se define el producto interior, se desarrolla el concepto de producto vectorial, destacando su utilidad como instrumento para iniciar el estudio de rectas y planos en Matemática 3.

*Unidad 5. Estructuras algebraicas.* En esta unidad describiremos brevemente las principales estructuras algebraicas que puede tener un conjunto con una o varias operaciones internas, de acuerdo a las propiedades que cumplan dichas operaciones.

*Unidad 6. Espacios vectoriales.* Se exponen algunas ideas fundamentales acerca de los espacios vectoriales, en general. Éstos se definen axiomáticamente pero se aclara que para verificar los axiomas, en casi todas las aplicaciones, sólo se necesita comprobar la cerradura que se tiene debajo de las operaciones fundamentales: adición de vectores y producto por escalar. Se desarrollan de manera breve los mecanismos esenciales del Álgebra lineal: subespacios, independencia lineal, base, dimensión...

Es claro que esta versión preliminar existen muchos errores tipográficos y de temarios. Espero que durante el transcurso del ciclo los estudiantes puedan hacer las correcciones al escrito y así poder tener en el futuro unos apuntes mejorados.

Pese al esfuerzo puesto en el ordenamiento de estos contenidos del revisor, diseñador, editor y autor; los errores son inevitables.

Termino agradeciendo a la Editorial Universidad Don Bosco, por la ayuda y estímulo que me proporcionó durante la preparación de estos apuntes.

